# Limiti di funzioni in $\mathbb{R}^n$

## Definizioni

**Definizione 1.** *Siano $\Omega$ un sottoinsieme qualsiasi di $\mathbb{R}^d$ e $X_0 \in \Omega$ un punto fissato in $\Omega$. Sia $F : \Omega \setminus \{X_0\} \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali.*

(1) *Diciamo che il numero reale $\ell$ è il limite di $F$ per $X \to X_0$ e scriviamo*

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell, \tag{1}$$

*se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\boxed{\text{per ogni } X \in \Omega \text{ tale che } |X - X_0| < \delta \text{ si ha che } |F(X) - \ell| < \varepsilon.}$$

*che possiamo scrivere in modo equivalente come*

$$\boxed{X \in \Omega \cap B_\delta(X_0) \quad \Rightarrow \quad |F(X) - \ell| < \varepsilon.}$$

(2) *Diciamo che $F$ tende a più infinito per $X \to X_0$ e scriviamo*

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = +\infty, \tag{2}$$

*se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\boxed{\text{per ogni } X \in \Omega \text{ tale che } |X - X_0| < \delta \text{ si ha che } F(X) > M.}$$

*o equivalentemente*

$$\boxed{X \in \Omega \cap B_\delta(X_0) \quad \Rightarrow \quad F(X) > M.}$$

*Inoltre, se $X_0$ è un punto della parte interna di $\Omega$, allora scriveremo semplicemente*

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = \ell \qquad e \qquad \lim_{X \to X_0} F(X) = +\infty$$

*al posto di (1) e (2).*

## Alcune regole algebriche per il calcolo dei limiti

**Proposizione 2.** *Siano $\Omega$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$ ed $F, G : \Omega \to \mathbb{R}$ due funzione a valori reali. Sia $X_0 \in \partial\Omega$ un punto tale che $X_0 \notin \Omega$. Se*

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = a \qquad e \qquad \lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} G(X) = b,$$

*allora*

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} (F + G) = a + b \qquad e \qquad \lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} FG = ab.$$

*Inoltre, se $b \neq 0$, allora*

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} \frac{F(X)}{G(X)} = \frac{a}{b}.$$

**Proposizione 3.** *Siano $\Omega$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$ ed $F, G : \Omega \to \mathbb{R}$ due funzione a valori reali. Sia $X_0 \in \partial\Omega$ un punto tale che $X_0 \notin \Omega$. Se*

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = +\infty$$

*e se $G$ è una funzione limitata, allora*

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} \frac{G}{F} = 0.$$

---

## Limiti lungo i raggi uscenti da un punto

**Proposizione 4.** *Siano $\Omega$ un insieme in $\mathbb{R}^n$, $X_0$ un punto della sua parte interna $\mathring{\Omega}$ ed $F : \Omega \backslash \{X_0\} \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali. Se esiste il limite*

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = \ell,$$

*allora per ogni vettore non-nullo $V \in \mathbb{R}^n$ esiste anche il limite*

$$\lim_{t \to 0^+} F(X_0 + tV) = \ell. \tag{3}$$

**Osservazione 5.** *Osserviamo che se $V$ e $W$ sono due vettori colineari e non-nulli, allora*

$$\lim_{t \to 0^+} F(X_0 + tV) = \lim_{t \to 0^+} F(X_0 + tW).$$

*È sufficiente quindi calcolare i limiti direzionali (3) solo per i vettori $V$ di norma 1.*

**Osservazione 6** (Limiti e coordinate polari)**.** *Osserviamo che in $\mathbb{R}^2$ ogni vettore $V$ di norma 1 si può scrivere come*

$$V = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \textit{per un qualche} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

*Allora, data una funzione $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{X_0 := (x_0, y_0)\} \to \mathbb{R}$ il limite*

$$\lim_{t \to 0^+} F(X_0 + tV)$$

*si può scrivere come*

$$\lim_{t \to 0^+} F(X_0 + tV) = \lim_{\rho \to 0^+} F(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta).$$

*In questo, la poroposizione precedente implica che se esiste il limite*

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = \ell,$$

*allora, per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ si ha che*

$$\lim_{\rho \to 0^+} F(x_0 + \rho\cos\theta\,,\, y_0 + \rho\sin\theta) = \ell.$$

> Negli esempi concreti, Proposizione 4 si può usare per dimostrare la non-esistenza di limite in un determinato punto. Infatti, se si trovano due vettori non-nulli $V, W$ tali che
>
> $$\lim_{t \to 0^+} F(X_0 + tV) \neq \lim_{t \to 0^+} F(X_0 + tW),$$
>
> allora il limite
>
> $$\lim_{X \to X_0} F(X)$$
>
> non esiste.

**Esercizio 7.** *Data la funzione*

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2},$$

*calcolare il limite* $\lim\limits_{t\to 0^+} F(tV)$ *al variare del vettore non-nullo* $V = (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

**Esercizio 8.** *Data la funzione*

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^4},$$

*calcolare il limite* $\lim\limits_{t\to 0^+} F(tV)$ *al variare del vettore non-nullo* $V = (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

**Esercizio 9.** *Data la funzione*

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^4},$$

*calcolare il limite* $\lim\limits_{t\to 0^+} F(tV)$ *al variare del vettore non-nullo* $V = (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

**Esercizio 10.** *Data la funzione*

$$F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2+y^4+z^6},$$

*calcolare il limite* $\lim\limits_{t\to 0^+} F(tV)$ *al variare del vettore non-nullo* $V = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Uno può congetturare, per esempio che, se per ogni vettore $V \in \mathbb{R}^n$ esiste il limite

$$\lim_{t\to 0^+} F(X_0 + tV) = \ell,$$

e questo limite è lo stesso per ogni vettore $V$, allora esiste (ed è uguale a $\ell$) anche il limite

$$\lim_{X\to X_0} F(X).$$

**Questo non è vero!**

**Esempio 11.** *Definiamo in* $\mathbb{R}^2$ *la funzione seguente:*

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \textit{se} \quad x^4 < |y| < x^2, \\ 1 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

*Allora:*

(1) *per ogni vettore* $V \in \mathbb{R}^2$ *si ha che*

$$\lim_{t\to 0^+} F(tV) = 1;$$

(2) *il limite*

$$\lim_{X\to 0} F(X).$$

*non esiste. Infatti, esistono due successioni di punti* $X_n \to 0$ *e* $Y_n \to 0$ *tali che*

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = 1 \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} F(Y_n) = 0.$$

## Limiti e coordinate polari

**Proposizione 12.** *Sia $F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali. Dato un numero reale $\ell$, sono equivalenti:*

(i) $\lim_{X\to 0} F(X) = \ell$;

(ii) $\lim_{\rho\to 0^+} \Big\{ \sup_{\partial B_\rho} \big|F - \ell\,\big| \Big\} = 0$.

*Dimostrazione. Supponiamo che* (i) *non vale.* Allora esistono $\varepsilon > 0$ ed una successione $X_n \to 0$ tali che

$$|F(X_n) - \ell| > \varepsilon \qquad \text{per ogni} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Poniamo $\rho_n := |X_n|$. Allora, abbiamo che

$$\rho_n \to 0 \qquad \text{e} \qquad \sup_{\partial B_{\rho_n}} \big|F - \ell\,\big| \geq |F(X_n) - \ell| > \varepsilon,$$

e quindi (ii) non vale.

*Supponiamo che* (ii) *non vale.* Allora, esistono $\varepsilon > 0$ ed una successione $\rho_n \to 0$ tali che

$$\sup_{\partial B_{\rho_n}} \big|F - \ell\,\big| > \varepsilon \qquad \text{per ogni} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Di conseguenza, su ogni sfera $\partial B_{\rho_n}$ esiste un punto $X_n$ tale che

$$\big|F(X_n) - \ell\,\big| > \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Siccome $|X_n| = \rho_n \to 0$, abbiamo che (i) non vale. □

In dimensione due possiamo riscrivere la proposizione precedente nel modo seguente:

**Proposizione 13.** *Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali. Dato $\ell \in \mathbb{R}$, sono equivalenti:*

(i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \ell$;

(ii) $\lim_{\rho\to 0^+} \Big\{ \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \big|F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - \ell\,\big| \Big\} = 0$.

**Esempio 14.** *Studiare il limite*

$$\ell := \lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) \qquad \textit{dove} \qquad F(x,y) := \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\Big(1 + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big)}.$$

*Soluzione.* In coordinate polari abbiamo

$$F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho\sin\theta}{\rho(1+\rho^{-2}\sin^2\theta)} = \frac{\sin\theta}{1+\rho^{-2}\sin^2\theta}.$$

Osserviamo che quando $\theta = 0$, la funzione $F$ è zero per ogni $\rho$. Di conseguenza, se il limite $\ell$ esiste deve per forza essere uguale a zero. Per verificare se effettivamente $\ell = 0$, fissiamo $\rho > 0$ e studiamo la funzione

$$f_\rho : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}\,, \qquad f_\rho(\theta) := \frac{\sin\theta}{1+\rho^{-2}\sin^2\theta}.$$

Per trovare il massimo di $f_\rho$ su $[0, 2\pi]$, calcoliamo la derivata

$$f'_\rho(\theta) = \frac{\cos\theta\,(1-\rho^{-2}\sin^2\theta)}{(1+\rho^{-2}\sin^2\theta)^2}.$$

Quindi, abbiamo le seguenti possibilita per il punto di massimo $\theta_M$ del modulo $|f_\rho|$:

(1) il massimo è raggiunto negli estremi dell'intervallo: $\theta_M = 0$ oppure $\theta_M = 2\pi$;

(2) $\cos(\theta_M) = 0$;

(3) $\sin(\theta_M) = \pm\rho$.

Nel caso (1), abbiamo semplicemente che $f_\rho(\theta_M) = 0$.
Nel caso (2), osserviamo che necessariamenre $\sin(\theta_M) = \pm 1$ e quindi

$$|f_\rho|(\theta_M) = \frac{1}{1+\rho^{-2}} = \frac{\rho^2}{1+\rho^2}.$$

Nel caso (3), abbiamo che

$$|f_\rho|(\theta_M) = \frac{\rho}{2}.$$

Quindi,

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]} f_\rho = \max\Big\{0, \frac{\rho^2}{1+\rho^2}, \frac{\rho}{2}\Big\} = \frac{\rho}{2}.$$

Di conseguenza

$$\lim_{\rho\to 0^+}\Big\{\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\big|F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\big|\Big\} = \lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho}{2} = 0$$

e quindi il limite $\ell$ esiste ed è uguale a zero. $\square$

---

## Liminf e limsup

**Definizione 15.** *Siano $\Omega$ un sottoinsieme qualsiasi di $\mathbb{R}^d$ e $X_0 \in \Omega$ un punto fissato in $\Omega$. Sia $F : \Omega \setminus \{X_0\} \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali.*

- *Definiamo* $\limsup\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X)$ *come*

$$\sup\Big\{\ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \ : \ \textit{esiste una successione} \ \ X_n \to X_0,\ X_n \in \Omega, \ \ \textit{tale che} \ \ \lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell\Big\}.$$

- *Definiamo* $\liminf\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X)$ *come*

$$\inf\Big\{\ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \ : \ \textit{esiste una successione} \ \ X_n \to X_0,\ X_n \in \Omega, \ \ \textit{tale che} \ \ \lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell\Big\}.$$

*Inoltre, se $X_0$ è un punto della parte interna di $\Omega$, allora scriveremo semplicemente*

$$\limsup_{X\to X_0} F(X) \qquad e \qquad \liminf_{X\to X_0} F(X).$$

**Osservazione 16.** *Se*

$$\liminf_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \limsup_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\},$$

*allora esiste (ed è uguale a $\ell$) il limite*

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell. \tag{4}$$

*Viceversa, se esiste il limite (4), allora*

$$\liminf_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \limsup_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell.$$

**Proposizione 17.** *Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali. Allora, sono equivaleni:*

(i) $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$;

(ii) $\displaystyle\limsup_{\rho\to 0^+} \Big\{ \sup_{\theta\in[0,2\pi]} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \Big\} = L$.

**Proposizione 18.** *Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali. Allora, sono equivaleni:*

(i) $\displaystyle\liminf_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$;

(ii) $\displaystyle\liminf_{\rho\to 0^+} \Big\{ \inf_{\theta\in[0,2\pi]} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \Big\} = L$.

**Esempio 19.** *Studiare il comportamento (esistenza di limite, limsup e liminf), per $(x,y) \to (0,0)$, della funzione seguente:*

$$F(x,y) := \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(1+y^2)}.$$

*Soluzione.* In coordinate polari abbiamo

$$F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho\sin\theta}{\rho(1+\rho^2\sin^2\theta)} = \frac{\sin\theta}{1+\rho^2\sin^2\theta}.$$

Fissiamo $\rho > 0$ e studiamo la funzione

$$f_\rho : [0,2\pi] \to \mathbb{R}\ , \qquad f_\rho(\theta) := \frac{\sin\theta}{1+\rho^2\sin^2\theta}.$$

Per trovare il massimo e il minimo di $f_\rho$ su $[0,2\pi]$, calcoliamo la derivata

$$f_\rho'(\theta) = \frac{\cos\theta\,(1-\rho^2\sin^2\theta)}{(1+\rho^2\sin^2\theta)^2}.$$

Quindi, abbiamo le seguenti possibilità per i punti di massimo e di minimo, $\theta_M$ e $\theta_m$, di $f_\rho$:

(1) $\theta_M$ (rispettivamente $\theta_m$) è uno degli estremi dell'intervallo $[0,2\pi]$;

(2) $\cos(\theta_M) = 0$ (rispettivamente $\cos(\theta_m) = 0$);

(3) $\sin(\theta_M) = \pm\frac{1}{\rho}$ (rispettivamente $\sin(\theta_m) = \pm\frac{1}{\rho}$).

Nel caso (1), abbiamo che

$$f_\rho(0) = f_\rho(2\pi) = 0.$$

Nel caso (2), osserviamo che:

$$\text{se} \quad \cos\theta = 0 \quad \text{allora necessariamente} \quad \sin(\theta) = 1 \quad \text{oppure} \quad \sin(\theta) = -1$$

e quindi

$$f_\rho(\theta) = \frac{1}{1+\rho^2} \qquad \text{oppure} \qquad f_\rho(\theta) = -\frac{1}{1+\rho^2}.$$

Il caso (3) invece non può verificarsi se $\rho > 1$.

Mettendo insieme i tre casi, abbiamo:

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]} f_\rho = \frac{1}{1+\rho^2} \qquad \text{e} \qquad \min_{\theta\in[0,2\pi]} f_\rho = -\frac{1}{1+\rho^2}.$$

Di conseguenza,

$$\liminf_{X\to 0} F(X) = \liminf_{\rho\to 0}\Big\{\min_{[0,2\pi]} f_\rho\Big\} = \lim_{\rho\to 0}\Big(-\frac{1}{1+\rho^2}\Big) = -1,$$

$$\limsup_{X\to 0} F(X) = \limsup_{\rho\to 0}\Big\{\max_{[0,2\pi]} f_\rho\Big\} = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{1+\rho^2} = 1\,.$$

Il limite $\liminf_{X\to 0} F(X)$ invece non esiste. □

**Osservazione 20.** *Osserviamo che date due funzioni*

$$f:[0,2\pi]\to\mathbb{R} \qquad e \qquad g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$$

*valgono le disuguaglianze*

$$\sup_{[0,2\pi]} f + \inf_{[0,2\pi]} g \le \sup_{[0,2\pi]}(f+g) \le \sup_{[0,2\pi]} f + \sup_{[0,2\pi]} g\,; \tag{5}$$

$$\inf_{[0,2\pi]} f + \inf_{[0,2\pi]} g \le \inf_{[0,2\pi]}(f+g) \le \inf_{[0,2\pi]} f + \sup_{[0,2\pi]} g\,. \tag{6}$$

*In particolare, se si ha che*

$$\lim_{\rho\to 0}\Big\{\sup_{\theta\in[0,2\pi]} |g_\rho|(\theta)\Big\} = 0,$$

*allora*

$$\limsup_{\rho\to 0}\Big\{\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\Big(f_\rho(\theta)+g_\rho(\theta)\Big)\Big\} = \limsup_{\rho\to 0}\Big\{\sup_{\theta\in[0,2\pi]} f_\rho(\theta)\Big\}\ ;$$

$$\liminf_{\rho\to 0}\Big\{\inf_{\theta\in[0,2\pi]}\Big(f_\rho(\theta)+g_\rho(\theta)\Big)\Big\} = \liminf_{\rho\to 0}\Big\{\inf_{\theta\in[0,2\pi]} f_\rho(\theta)\Big\}\ .$$

**Esempio 21.** *Studiare il comportamento (esistenza di limite, limsup e liminf), per $(x,y)\to(0,0)$, della funzione seguente:*

$$F(x,y) := \frac{\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ .$$

*Soluzione.* Scriviamo la funzione $F$ in coordinate polari come

$$F(\rho\cos\theta\,,\ \rho\sin\theta) = \frac{\sin\big(\rho\sin\theta\big)}{\rho}.$$

Ora, ricordiamo che siccome

$$\sin y = y + O(y^3),$$

esistono costanti $R>0$ e $C>0$ tali che

$$|\sin y - y| \le C|y|^3 \quad \text{per ogni} \quad y\in(-R,R).$$

Di conseguenza, possiamo scrivere $F(\rho\cos\theta\,,\ \rho\sin\theta)$ come

$$F(\rho\cos\theta\,,\ \rho\sin\theta) = \frac{\sin\big(\rho\sin\theta\big)}{\rho} = \frac{\rho\sin\theta}{\rho} + \frac{\sin\big(\rho\sin\theta\big)-\rho\sin\theta}{\rho} = \sin\theta + g_\rho(\theta),$$

dove, per $\rho<R$, abbiamo

$$|g_\rho(\theta)| \le \frac{C|\rho\sin\theta|^3}{\rho} \le C\rho^2 \quad \text{per ogni} \quad \theta\in[0,2\pi].$$

Quindi

$$\limsup_{\rho\to 0}\left\{\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\frac{\sin\big(\rho\sin\theta\big)}{\rho}\right\}=\limsup_{\rho\to 0}\left\{\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\sin\theta\right\}=1,$$

$$\liminf_{\rho\to 0}\left\{\inf_{\theta\in[0,2\pi]}\frac{\sin\big(\rho\sin\theta\big)}{\rho}\right\}=\liminf_{\rho\to 0}\left\{\inf_{\theta\in[0,2\pi]}\sin\theta\right\}=-1.$$

□

---

## Esercizi sui limiti, liminf e limsup

**Esercizio 22.** *Studiare il comportamento (esistenza di limite, limsup e liminf), per $(x,y)\to(0,0)$, delle funzioni seguenti:*

(1) $F(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2-xy}$ ;

(2) $F(x,y)=\dfrac{x^2-xy^2-y^2}{x^2+y^2}$ ;

(3) $F(x,y)=\dfrac{x^3+x^2y^2}{x^2+y^2}$ ;

(4) $F(x,y)=\dfrac{e^x-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ;

(5) $F(x,y)=\dfrac{e^{x+y}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ;

(6) $F(x,y)=\dfrac{e^x-e^y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ;

(7) $F(x,y)=\dfrac{\cos(\sqrt{x^2+y^2})-\cos x}{x^2+y^2}$ ;

(8) $F(x,y)=\dfrac{\cos(x)-\cos(y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ;

(9) $F(x,y)=\dfrac{(e^y-1)\sin x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ .

---

## Definizione di $o(\rho)$ e $o(\rho^k)$

**Definizione 23.** *Consideriamo una famiglia di funzioni*

$$g_\rho:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$$

*che dipende dal parametro $\rho>0$. Diciamo che*

$$g_\rho=o\big(\rho^k\big)\qquad\Big(\textit{a volte si scrive anche}\quad g_\rho(\theta)=o\big(\rho^k\big)\Big),$$

*se*

$$\lim_{\rho\to 0}\left\{\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\frac{|g_\rho(\theta)|}{\rho^k}\right\}=0.$$

*Scriveremo invece*

$$g_\rho=O\big(\rho^k\big)\qquad\Big(\textit{o anche}\quad g_\rho(\theta)=O\big(\rho^k\big)\Big),$$

*se si ha*

$$\limsup_{\rho\to 0}\left\{\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\frac{|g_\rho(\theta)|}{\rho^k}\right\}<+\infty.$$

**Proposizione 24.** *Siano*

$$f_\rho : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \qquad e \qquad g_\rho : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$$

*due famiglie di funzioni su* $[0, 2\pi]$ *dipendendi dal parametro* $\rho > 0$. *Allora, valgono le proprietà seguenti:*

- *Se* $g_\rho = o(\rho^k)$, *allora* $g_\rho = O(\rho^k)$.
- *Se* $g_\rho = O(\rho^k)$, *allora* $g_\rho = o(\rho^n)$ *per ogni* $n = 0, 1, \ldots, k-1$.
- *Se* $f_\rho = O(\rho^k)$ *e* $g_\rho = O(\rho^n)$, *allora* $f_\rho g_\rho = O(\rho^{k+n})$.
- *Se* $f_\rho = O(\rho^k)$ *e* $g_\rho = o(\rho^n)$, *allora* $f_\rho g_\rho = o(\rho^{k+n})$.
- *Se* $f_\rho = O(\rho^k)$ *e* $g_\rho = O(\rho^k)$, *allora* $f_\rho + g_\rho = O(\rho^k)$.
- *Se* $f_\rho = o(\rho^k)$ *e* $g_\rho = o(\rho^k)$, *allora* $f_\rho + g_\rho = o(\rho^k)$.

*Infine, data una funzione di una variabile* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *abbiamo che:*

(F1) *se* $F(t) = O(t^n)$, *per un qualche* $n \geq 1$, *e* $g_\rho = o(\rho^k)$ *per un* $k \geq 0$, *allora* $F \circ g_\rho = o(\rho^{kn})$;

(F2) *se* $F(t) = o(t^n)$ *per un* $n \geq 0$ *e* $g_\rho = O(\rho^k)$ *con* $k \geq 1$, *allora* $F \circ g_\rho = o(\rho^{kn})$;

(F3) *se* $F(t) = O(t^n)$ *per un* $n \geq 0$ *e* $g_\rho = O(\rho^k)$ *con* $k \geq 1$, *allora* $F \circ g_\rho = O(\rho^{kn})$;

*dove* $F \circ g_\rho : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *è la funzione composta* $(F \circ g_\rho)(\theta) = F(g_\rho(\theta))$.

*Dimostrazione.* Dimostriamo gli ultimi tre punti della proposizione. Supponiamo che

$$F(t) = O(t^n) \quad \text{con} \quad n \geq 1$$

e

$$g_\rho = o(\rho^k) \quad \text{con} \quad k \geq 0.$$

Allora

$$\sup_{\theta \in [0,2\pi]} \frac{|F(g_\rho(\theta))|}{\rho^{nk}} = \sup_{\theta \in [0,2\pi]} \left\{ \frac{|F(g_\rho(\theta))|}{|g_\rho(\theta)|^n} \frac{|g_\rho(\theta)|^n}{\rho^{nk}} \right\} \leq \left( \sup_{\theta \in [0,2\pi]} \frac{|F(g_\rho(\theta))|}{|g_\rho(\theta)|^n} \right) \left( \sup_{\theta \in [0,2\pi]} \frac{|g_\rho(\theta)|}{\rho^k} \right)^n. \tag{7}$$

Ora, siccome $\sup_\theta |g_\rho(\theta)|$ tende a zero per $\rho \to 0$, il primo termine in (7) è limitato, mentre il secondo tende a zero il che conclude la dimostrazione del primo degli ultimi tre punti. Per

Invece, supponendo che valgono le ipotesi del punto (F2),

$$F(t) = o(t^n) \quad \text{con} \quad n \geq 0$$

e

$$g_\rho = O(\rho^k) \quad \text{con} \quad k \geq 1,$$

abbiamo che il primo termine in (7) tende a zero mentre il secondo è limitato. Il punto (F3) è analogo. □

**Esempio 25.**

- $\sin(\rho \sin\theta) = O(\rho)$;
- $\sin(\rho \cos\theta) = O(\rho)$;
- $\sin(\rho \sin\theta) - \rho \sin\theta = O(\rho^3)$;
- $\sin(\rho \cos\theta) - \rho \cos\theta = O(\rho^3)$;
- $\cos(\rho \sin\theta) - 1 = O(\rho^2)$;
- $e^{\rho \sin\theta} - 1 = O(\rho)$;
- $e^{\rho \cos\theta} - 1 - \rho\cos\theta - \frac{1}{2}\rho\cos^2\theta = O(\rho^3)$ *che possiamo scrivere in maniera equivalente anche come*

$$e^{\rho \cos\theta} = 1 + \rho\cos\theta + \frac{1}{2}\rho^2 \cos^2\theta + O(\rho^3).$$

## Funzioni in coordinate polari

Ricordiamo che per ogni vettore $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tale che $a^2 + b^2 = 1$ esiste un unico $\theta \in [0,1)$ tale che

$$a = \cos\theta \qquad \text{e} \qquad b = \sin\theta.$$

Di conseguenza, per ogni vettore non-nullo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esiste un'unica coppia di numeri

$$\rho \in (0,+\infty) \qquad \text{e} \qquad \theta \in [0,2\pi)$$

tale che

$$x = \rho\cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = \rho\sin\theta, \tag{8}$$

dove

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}\ .$$

Di conseguenza, data una qualsiasi famiglia di funzioni

$$f_\rho : [0,2\pi) \to \mathbb{R}$$

parametrizzata da $\rho \in (0,+\infty)$, possiamo definire la funzione

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) := f_\rho(\theta),$$

dove, per ogni fissato vettore non-nullo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\rho$ e $\theta$ sono dati da (8). Si ha quindi

$$F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = f_\rho(\theta) \quad \text{per ogni} \quad \rho > 0 \quad \text{e} \quad \theta \in [0,2\pi).$$

Possiamo quindi studiare il comportamento locale di funzioni di due variabili espresse direttamente in coordinate polari.

**Esempio 26.** *Studiare il comportamento (limite, liminf e limsup) nell'origine* $(x,y) = (0,0)$ *delle seguenti funzioni funzione* $F$ *espresse direttamente in coordinate polari* $\rho \in (0,+\infty)$, $\theta \in [0,2\pi)$

(1) $F(\rho,\theta) = \dfrac{\theta(1-\theta)}{1+\rho\theta}$ ;

(2) $F(\rho,\theta) = \dfrac{\theta}{1+\theta/\rho}$ ;

(3) $F(\rho,\theta) = \dfrac{\sin(\theta\rho)}{e^{\theta\rho}-1}$ .

---

## Qualche considerazione finale

Ci possiamo chiedere quindi per quali famiglie di funzioni $f(\rho,\cdot)$, parametrizzate da $\rho \in (0,+\infty)$ e definite sull'intervallo $[0,2\pi)$, esiste un'espansione di Taylor della forma

$$f(\rho,\theta) := f_0(\theta) + f_1(\theta)\rho + f_2(\theta)\rho^2 + f_3(\theta)\rho^3 + \cdots + f_k(\theta)\rho^k + o(\rho^k), \tag{9}$$

dove

$$f_j : [0,2\pi) \to \mathbb{R}$$

sono funzioni limitate per ogni $j = 0,\dots,k$. (È immediato dimostrare che se una tale espansione esiste, allora è anche unica.)

Osserviamo che un'espansione della forma (9) esiste, nel caso in cui la famiglia di funzioni $f(\rho,\cdot) : [0,2\pi) \to \mathbb{R}$ è stata generata da un polinomio di due variabili

$$f(\rho,\theta) = P(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

Per esempio, $f(\rho,\theta) = \rho^n\cos^n\theta$ oppure $f(\rho,\theta) = \rho^n\cos(n\theta)$. Altri esempi sono le funzioni

$$e^{\rho\sin\theta}\ , \qquad \ln(1+\rho\sin\theta)\ , \qquad \frac{1}{1+\rho\cos\theta}\ , \qquad \sqrt{1+\rho^2\sin\theta\cos\theta}\ .$$